

Table 25.4      ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas= $\pm x_i$  (Zeros of Legendre Polynomials)

$\pm x_i$

$w_i$

$n=2$

0.57735 02691 89626

1.00000 00000 00000

$n=3$

0.00000 00000 00000

0.77459 66692 41483

$n=4$

0.33998 10435 84856

0.86113 63115 94053

$n=5$

0.00000 00000 00000

0.53846 93101 05683

0.90617 98459 38664

$n=6$

0.23861 91860 83197

0.66120 93864 66265

0.93246 95142 03152

$n=7$

0.00000 00000 00000

0.40584 51513 77397

0.74153 11855 99394

0.94910 79123 42759

$\pm x_i$

$w_i$

$n=8$

0.18343 46424 95650

0.52553 24099 16329

0.79666 64774 13627

0.96028 98564 97536

$n=9$

0.00000 00000 00000

0.32425 34234 03809

0.61337 14327 00590

0.83603 11073 26636

0.96816 02395 07626

$n=10$

0.14887 43389 81631

0.43339 53941 29247

0.67940 95682 99024

0.86506 33666 88985

0.97390 65285 17172

$n=12$

0.12523 34085 11469

0.36783 14989 98180

0.58731 79542 86617

0.76990 26741 94305

0.90411 72563 70475

0.98156 06342 46719

$n=16$

0.18945 06104 55068 496285

0.18260 34150 44923 588867

0.16915 65193 95002 538189

0.14959 59888 16576 732081

0.12462 89712 55533 872052

0.09515 85116 82492 784810

0.06225 35239 38647 892863

0.02715 24594 11754 094852

$n=20$

0.15275 33871 30725 850698

0.14917 29864 72603 746788

0.14209 61093 18382 051329

0.13168 86384 49176 626898

0.11819 45319 61518 417312

0.10193 01198 17240 435037

0.08327 67415 76704 748725

0.06267 20483 34109 063570

0.04060 14298 00386 941331

0.01761 40071 39152 118312

$n=24$

0.12793 81953 46752 156974

0.12583 74563 46828 296121

0.12167 04729 27803 391204

0.11550 56680 53725 601353

0.10744 42701 15965 634783

0.09761 86521 04113 888270

0.08619 01615 31953 275917

0.07334 64814 11080 305734

0.05929 85849 15436 780746

0.04427 74388 17419 806169

0.02853 13886 28933 663181

0.01234 12297 99987 199547

Compiled from P. Davis and P. Rabinowitz, Abcissas and weights for Gaussian quadratures of high order, J. Research NBS 56, 35-37, 1956, RP2645; P. Davis and P. Rabinowitz, Additional abcissas and weights for Gaussian quadratures of high order. Values for  $n=64, 80$ , and  $96$ , J. Research NBS 60, 613-614, 1958, RP2875; and A. N. Lowan, N. Davids, and A. Levenson, Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 48, 739-743, 1942 (with permission).

Table 25.4

## ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abcissas= $\pm x_i$  (Zeros of Legendre Polynomials)Weight Factors= $w_i$ 

$\pm x_i$	$n=32$				$w_i$
0.04830	76656	87738	316235	0.09654	00885 14727 800567
0.14447	19615	82796	493485	0.09563	87200 79274 859419
0.23928	73622	52137	074545	0.09384	43990 80804 565639
0.33186	86022	82127	649780	0.09117	38786 95763 884713
0.42135	12761	30635	345364	0.08765	20930 04403 811143
0.50689	99089	32229	390024	0.08331	19242 26946 755222
0.58771	57572	40762	329041	0.07819	38957 87070 306472
0.66304	42669	30215	200975	0.07234	57941 08848 506225
0.73218	21187	40289	680387	0.06582	22227 76361 846838
0.79448	37959	67942	406963	0.05868	40934 78535 547145
0.84936	76137	32569	970134	0.05099	80592 62376 176196
0.89632	11557	66052	123965	0.04283	58980 22226 680657
0.93490	60759	37739	689171	0.03427	38629 13021 433103
0.96476	22555	87506	430774	0.02539	20653 09262 059456
0.98561	15115	45268	335400	0.01627	43947 30905 670605
0.99726	38618	49481	563545	0.00701	86100 09470 096600
$n=40$					
0.03877	24175	06050	821933	0.07750	59479 78424 811264
0.11608	40706	75255	208483	0.07703	98181 64247 965588
0.19269	75807	01371	099716	0.07611	03619 00626 242372
0.26815	21850	07253	681141	0.07472	31690 57968 264200
0.34199	40908	25758	473007	0.07288	65823 95804 059061
0.41377	92043	71605	001525	0.07061	16473 91286 779695
0.48307	58016	86178	712909	0.06791	20458 15233 903826
0.54946	71250	95128	202076	0.06480	40134 56601 038075
0.61255	38896	67980	237953	0.06130	62424 92928 939167
0.67195	66846	14179	548379	0.05743	97690 99391 551367
0.72731	82551	89927	103281	0.05322	78469 83936 824355
0.77830	56514	26519	387695	0.04869	58076 35072 232061
0.82461	22308	33311	663196	0.04387	09081 85673 271992
0.86595	95032	12259	503821	0.03878	21679 74472 017640
0.90209	88069	68874	296728	0.03346	01952 82547 847393
0.93281	28082	78676	533361	0.02793	70069 80023 401098
0.95791	68192	13791	655805	0.02224	58491 94166 957262
0.97725	99499	83774	262663	0.01642	10583 81907 888713
0.99072	62386	99457	006453	0.01049	82845 31152 813615
0.99823	77097	10559	200350	0.00452	12770 98533 191258
$n=48$					
0.03238	01709	62869	362033	0.06473	76968 12683 922503
0.09700	46992	09462	698930	0.06446	61644 35950 082207
0.16122	23560	68891	718056	0.06392	42385 84648 186624
0.22476	37903	94689	061225	0.06311	41922 86254 025657
0.28736	24873	55455	576736	0.06203	94231 59892 663904
0.34875	58862	92160	738160	0.06070	44391 65893 880053
0.40868	64819	90716	729916	0.05911	48396 98395 635746
0.46690	29047	50958	404545	0.05727	72921 00403 215705
0.52316	09747	22233	033678	0.05519	95036 99984 162868
0.57722	47260	83972	703818	0.05289	01894 85193 667096
0.62886	73967	76513	623995	0.05035	90355 53854 474958
0.67787	23796	32663	905212	0.04761	66584 92490 474826
0.72403	41309	23814	654674	0.04467	45608 56694 280419
0.76715	90325	15740	339254	0.04154	50829 43464 749214
0.80706	62040	29442	627083	0.03824	13510 65830 706317
0.84358	82616	24393	530711	0.03477	72225 64770 438893
0.87657	20202	74247	885906	0.03116	72278 32798 088902
0.90587	91367	15569	672822	0.02742	65097 08356 948200
0.93138	66907	06554	333114	0.02357	07608 39324 379141
0.95298	77031	60430	860723	0.01961	61604 57355 527814
0.97059	15925	46247	250461	0.01557	93157 22943 848728
0.98412	45837	22826	857745	0.01147	72345 79234 539490
0.99353	01722	66350	757548	0.00732	75539 01276 262102
0.99877	10072	52426	118601	0.00315	33460 52305 838633

Table 25.4

## ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas =  $\pm x_i$  (Zeros of Legendre Polynomials) Weight Factors =  $w_i$  $\pm x_i$  $w_i$  $n=64$ 

0.02435	0.02926	0.63424	0.432509	0.04869	0.09570	0.09139	0.720383
0.07299	0.31217	0.87799	0.039450	0.04857	0.54674	0.41503	0.426935
0.12146	0.28192	0.96120	0.554470	0.04834	0.47622	0.34802	0.957170
0.16964	0.44204	0.23992	0.818037	0.04799	0.93885	0.96458	0.307728
0.21742	0.36437	0.40007	0.084150	0.04754	0.01657	0.14830	0.308662
0.26468	0.71622	0.08767	0.416374	0.04696	0.81828	0.16210	0.017325
0.31132	0.28719	0.90210	0.956158	0.04628	0.47965	0.81314	0.417296
0.35722	0.01583	0.37668	0.115950	0.04549	0.16279	0.27418	0.144480
0.40227	0.01579	0.63991	0.603696	0.04459	0.05581	0.63756	0.563060
0.44636	0.60172	0.53464	0.087985	0.04358	0.37245	0.29323	0.453377
0.48940	0.31457	0.07052	0.957479	0.04247	0.35151	0.23653	0.589007
0.53127	0.94640	0.19894	0.545658	0.04126	0.25632	0.42623	0.528610
0.57189	0.56462	0.02634	0.034284	0.03995	0.37411	0.32720	0.341387
0.61115	0.53551	0.72393	0.250249	0.03855	0.01531	0.78615	0.629129
0.64896	0.54712	0.54657	0.339858	0.03705	0.51285	0.40240	0.046040
0.68523	0.63130	0.54233	0.242564	0.03547	0.22132	0.56882	0.383811
0.71988	0.18501	0.71610	0.826849	0.03380	0.51618	0.37141	0.609392
0.75281	0.99072	0.60531	0.896612	0.03205	0.79283	0.54851	0.553585
0.78397	0.23589	0.43341	0.407610	0.03023	0.46570	0.72402	0.478868
0.81326	0.53151	0.22797	0.559742	0.02833	0.96726	0.14259	0.483228
0.84062	0.92962	0.52580	0.362752	0.02637	0.74697	0.15054	0.658672
0.86599	0.93981	0.54092	0.819761	0.02435	0.27025	0.68710	0.873338
0.88931	0.54459	0.95114	0.105853	0.02227	0.01738	0.08383	0.254159
0.91052	0.21370	0.78502	0.805756	0.02013	0.48231	0.53530	0.209372
0.92956	0.91721	0.31939	0.575821	0.01795	0.17157	0.75697	0.343085
0.94641	0.13748	0.58402	0.816062	0.01572	0.60304	0.76024	0.719322
0.96100	0.87996	0.52053	0.718919	0.01346	0.30478	0.96718	0.642598
0.97332	0.68277	0.89910	0.963742	0.01116	0.81394	0.60131	0.128819
0.98333	0.62538	0.84625	0.956931	0.00884	0.67598	0.26363	0.947723
0.99101	0.33714	0.76744	0.320739	0.00650	0.44579	0.68978	0.362856
0.99634	0.01167	0.71955	0.279347	0.00414	0.70332	0.60562	0.467635
0.99930	0.50417	0.35772	0.139457	0.00178	0.32807	0.21696	0.432947

 $n=80$ 

0.01951	0.13832	0.56793	0.997654	0.03901	0.78136	0.56306	0.654811
0.05850	0.44371	0.52420	0.668629	0.03895	0.83959	0.62769	0.531199
0.09740	0.83984	0.41584	0.599063	0.03883	0.96510	0.59051	0.968932
0.13616	0.40228	0.91433	0.886559	0.03866	0.17597	0.74076	0.463327
0.17471	0.22918	0.32646	0.812559	0.03842	0.49930	0.06959	0.423185
0.21299	0.45028	0.57666	0.132572	0.03812	0.97113	0.14477	0.638344
0.25095	0.23583	0.92272	0.120493	0.03777	0.63643	0.62001	0.397490
0.28852	0.80548	0.84511	0.853109	0.03736	0.54902	0.38730	0.490027
0.32566	0.43707	0.47701	0.914619	0.03689	0.77146	0.38276	0.008839
0.36230	0.47534	0.99487	0.315619	0.03637	0.37499	0.05835	0.978044
0.39839	0.34058	0.81969	0.227024	0.03579	0.43939	0.53416	0.054603
0.43387	0.53708	0.31756	0.093062	0.03516	0.05290	0.44747	0.593496
0.46869	0.66151	0.70544	0.477036	0.03447	0.31204	0.51753	0.928794
0.50280	0.41118	0.88784	0.987594	0.03373	0.32149	0.84611	0.522817
0.53614	0.59208	0.97131	0.932020	0.03294	0.19393	0.97645	0.401383
0.56867	0.12681	0.22709	0.784725	0.03210	0.04986	0.73487	0.773148
0.60033	0.66228	0.29751	0.743155	0.03121	0.01741	0.88114	0.701642
0.63107	0.57730	0.46871	0.966248	0.03027	0.23217	0.59557	0.980661
0.66085	0.98989	0.86119	0.801736	0.02928	0.83695	0.83267	0.847693
0.68963	0.76443	0.42027	0.600771	0.02825	0.98160	0.57276	0.862397
0.71736	0.51853	0.62099	0.880254	0.02718	0.82275	0.00486	0.806674
0.74400	0.02975	0.83597	0.272317	0.02607	0.52357	0.67565	0.117903
0.76950	0.24201	0.35041	0.373866	0.02492	0.25357	0.64115	0.491105
0.79383	0.27175	0.04605	0.449949	0.02373	0.18828	0.65930	0.101293
0.81695	0.41386	0.81463	0.470371	0.02250	0.50902	0.46332	0.461926
0.83883	0.14735	0.80255	0.275617	0.02124	0.40261	0.15782	0.063889
0.85943	0.14066	0.63111	0.096977	0.01995	0.06108	0.78141	0.998929
0.87872	0.25676	0.78213	0.828704	0.01862	0.68142	0.08299	0.031429
0.89667	0.55794	0.38770	0.683194	0.01727	0.46520	0.56269	0.306359
0.91326	0.31025	0.71757	0.654165	0.01589	0.61835	0.83725	0.688045
0.92845	0.98771	0.72445	0.795953	0.01449	0.35080	0.40509	0.076117
0.94224	0.27613	0.09872	0.674752	0.01306	0.87615	0.92401	0.339294
0.95459	0.07663	0.43634	0.905493	0.01162	0.41141	0.20797	0.826916
0.96548	0.50890	0.43799	0.251452	0.01016	0.17660	0.41103	0.064521
0.97490	0.91405	0.85727	0.793386	0.00868	0.39452	0.69260	0.858426
0.98284	0.85727	0.38629	0.070418	0.00719	0.29047	0.68117	0.312753
0.98929	0.13024	0.97755	0.531027	0.00569	0.09224	0.51403	0.198649
0.99422	0.75409	0.65688	0.277892	0.00418	0.03131	0.24694	0.895237
0.99764	0.98643	0.98237	0.688900	0.00266	0.35335	0.89512	0.681669
0.99955	0.38226	0.51630	0.629880	0.00114	0.49500	0.03186	0.941534

Table 25.4

## ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas =  $\pm x_i$  (Zeros of Legendre Polynomials)      Weight Factors =  $w_i$

$\pm x_i$	$n = 96$		$w_i$
0.01627	67448	49602	969579
0.04881	29851	36049	731112
0.08129	74954	64425	558994
0.11369	58501	10665	920911
0.14597	37146	54896	941989
0.17809	68823	67618	602759
0.21003	13104	60567	203603
0.24174	31561	63840	012328
0.27319	88125	91049	141487
0.30436	49443	54496	353024
0.33520	85228	92625	422616
0.36569	68614	72313	635031
0.39579	76498	28908	603285
0.42547	89884	07300	545365
0.45470	94221	67743	008636
0.48345	79739	20596	359768
0.51169	41771	54667	673586
0.53938	81083	24357	436227
0.56651	04185	61397	168404
0.59303	23647	77572	080684
0.61892	58401	25468	570386
0.64416	34037	84967	106798
0.66871	83100	43916	153953
0.69256	45366	42171	561344
0.71567	68123	48967	626225
0.73803	06437	44400	132851
0.75960	23411	76647	498703
0.78036	90438	67433	217604
0.80030	87441	39140	817229
0.81940	03107	37931	675539
0.83762	35112	28187	121494
0.85495	90334	34601	455463
0.87138	85059	09296	502874
0.88689	45174	02420	416057
0.90146	06353	15852	341319
0.91507	14231	20898	074206
0.92771	24567	22308	690965
0.93937	03397	52755	216932
0.95003	27177	84437	635756
0.95968	82914	48742	539300
0.96832	68284	63264	212174
0.97593	91745	85136	466453
0.98251	72635	63014	677447
0.98805	41263	29623	799481
0.99254	39003	23762	624572
0.99598	18429	87209	290650
0.99836	43758	63181	677724
0.99968	95038	83230	766828
0.03255	06144	92363	166242
0.03251	61187	13868	835987
0.03244	71637	14064	269364
0.03234	38225	68575	928429
0.03220	62047	94030	250669
0.03203	44562	31992	663218
0.03182	87588	94411	006535
0.03158	93307	70727	168558
0.03131	64255	96861	355813
0.03101	03325	86313	837423
0.03067	13761	23669	149014
0.03029	99154	20827	593794
0.02989	63441	36328	385984
0.02946	10899	58167	905970
0.02899	46141	50555	236543
0.02849	74110	65085	385646
0.02797	00076	16848	334440
0.02741	29627	26029	242823
0.02682	68667	25591	762198
0.02621	23407	35672	413913
0.02557	00360	05349	361499
0.02490	06332	22483	610288
0.02420	48417	92364	691282
0.02348	33990	85926	219842
0.02273	70696	58329	374001
0.02196	66444	38744	349195
0.02117	29398	92191	298988
0.02035	67971	54333	324595
0.01951	90811	40145	022410
0.01866	06796	27411	467385
0.01778	25023	16045	260838
0.01688	54798	64245	172450
0.01597	05629	02562	291381
0.01503	87210	26994	938006
0.01409	09417	72314	860916
0.01312	82295	66961	572637
0.01215	16046	71088	319635
0.01116	21020	99838	498591
0.01016	07705	35008	415758
0.00914	86712	30783	386633
0.00812	68769	25698	759217
0.00709	64707	91153	865269
0.00605	85455	04235	961683
0.00501	42027	42927	517693
0.00396	45543	38444	686674
0.00291	07318	17934	946408
0.00185	39607	88946	921732
0.00079	67920	65552	012429